# コンピュータグラフィックス基礎

## 第６回 曲線・曲面の表現
## 「Ｂスプライン曲線」

金森 由博

# 学習の目標

- B スプライン曲線を学ぶ
- 曲線の基底関数の概念を理解する
- 制御点を入力することで、B スプライン曲線を描画するアプリケーションの開発を行えるようになる

# 基底関数の理解

曲線上の点の位置は、パラメータ $t$ と制御点の位置によって定義される

曲線上の点の位置は、制御点の座標を混ぜ合わせて作る

$$P(t) = \alpha(t)P_0 + \beta(t)P_1 + \gamma(\mathrm{t})P_2 \cdot\cdot$$

この混ぜ合わせ方の係数関数α、β、γ・・・を定義したものが基底関数

# ベジェ曲線の復習

$n$ 次ベジェ曲線（ベジェ曲線の一般化）

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} \boxed{{}_nC_i\, t^i (1-t)^{n-i}} P_i$$

$${}_nC_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

制御点に対する係数
（重み付け、混合比）

2項係数

パラメータ $t$ によって変化する

「基底関数」

# ベジェ曲線の復習

- バーンスタイン基底関数

$$B_i^n = {}_nC_i\, t^i (1-t)^{n-i}$$

$n$ は次数を $i$ は制御点の番号を表す

3次の場合

$$B_0^3 = (1-t)^3$$

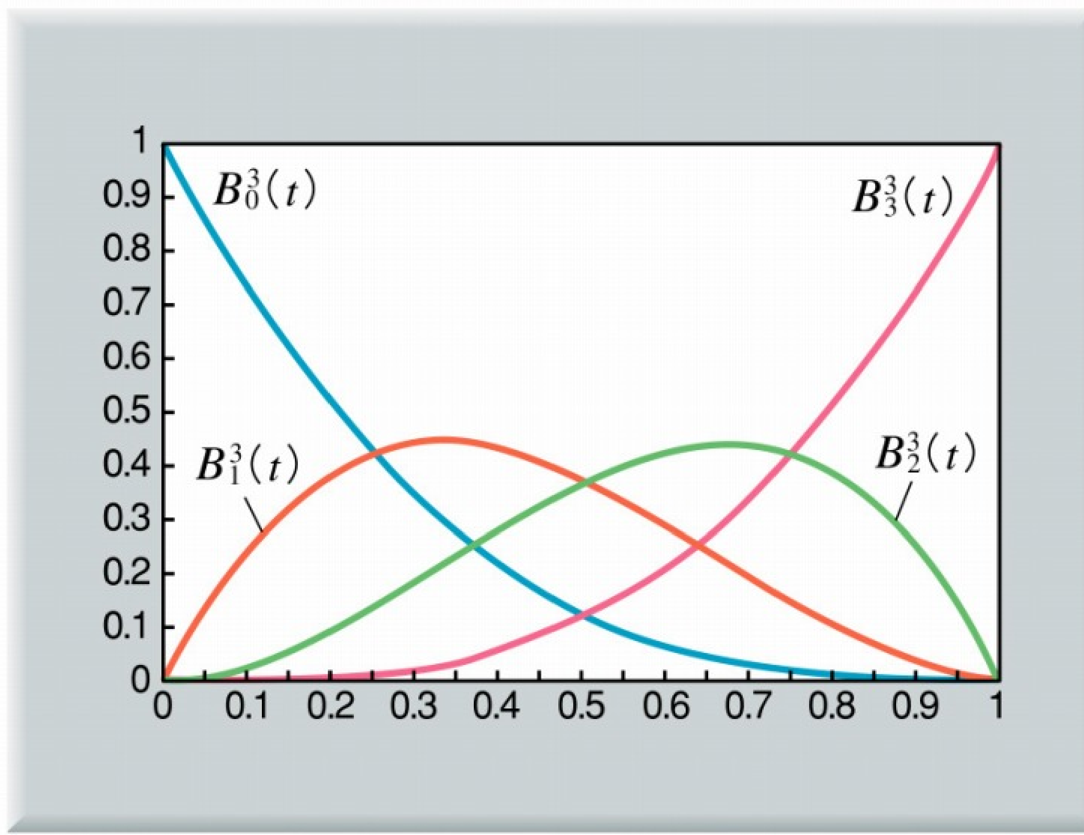
$$B_1^3 = 3t(1-t)^2$$

$$B_2^3 = 3t^2(1-t)$$

$$B_3^3 = t^3$$

3次のベジェ曲線において
制御点P₀の重み付けが
どのように変化するか

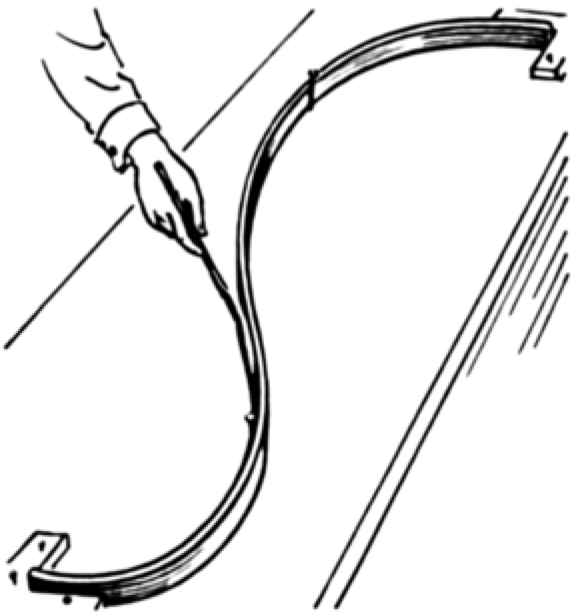
■図3.24——3次バーンスタイン基底関数のグラフ

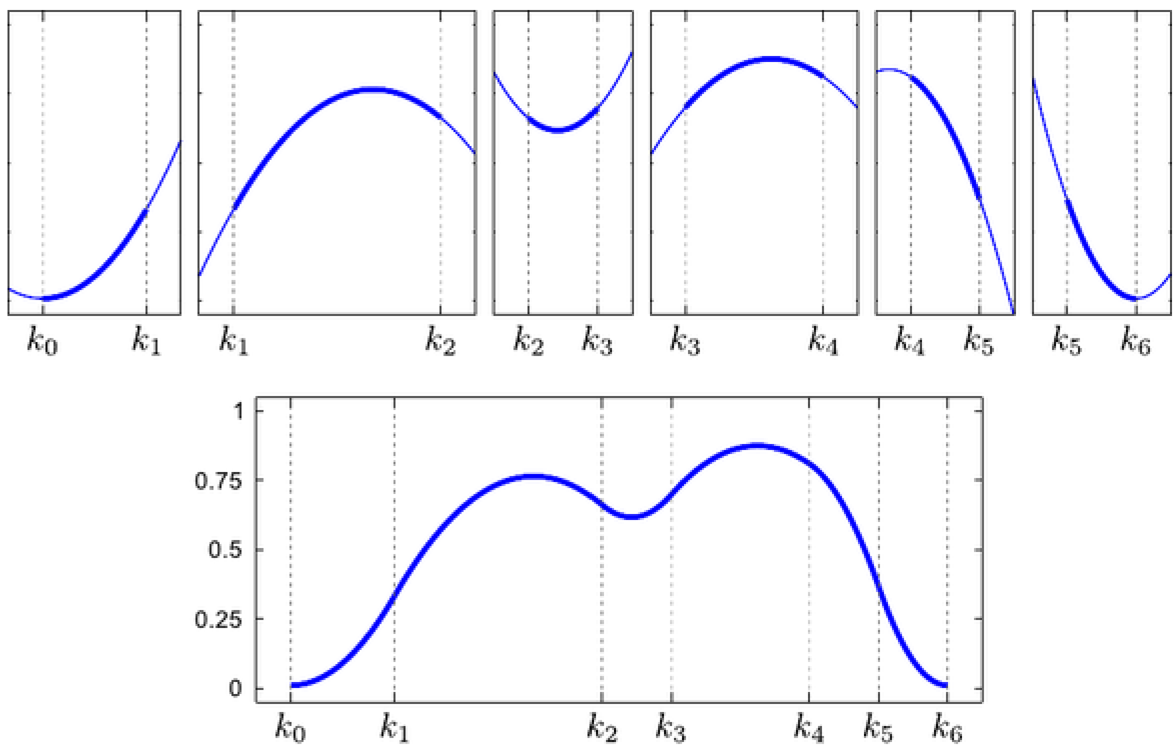



「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

# Ｂスプライン曲線

# スプライン曲線のイメージ






複数の曲線セグメントを繋ぎ合わせて作る
物理的には最も曲げエネルギーの小さい曲線

http://www.brnt.eu/phd/node11.html

# B スプライン曲線の特徴

- セグメントが常に微分も含めて連続的に接続する
  （ベジェ曲線ではセグメント間の微分の連続性は
  保証されていない）

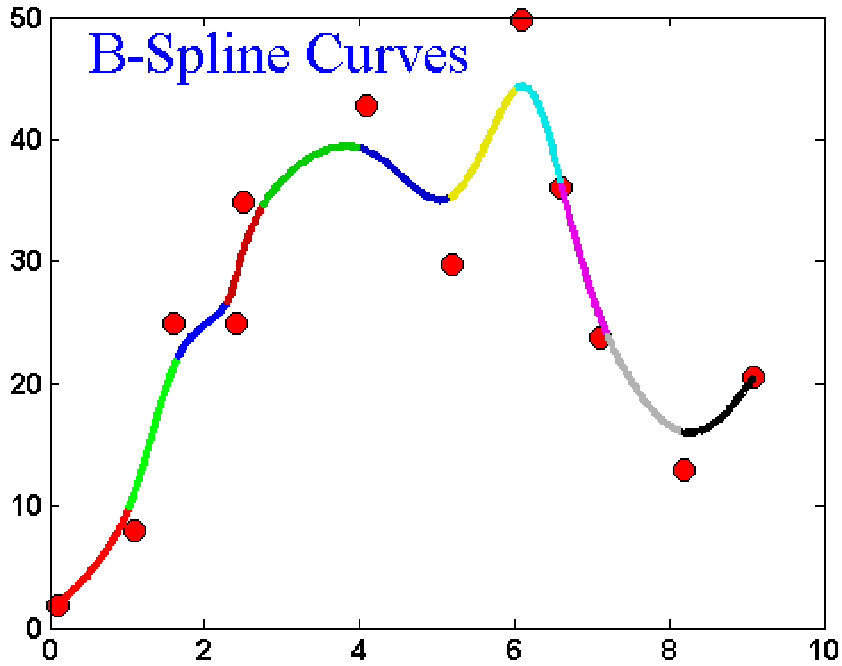
- 制御点をいくつでも指定できる
  ※ 曲線上の1点に着目した場合、その点の位置に影響を
  与えるのはベジェ曲線と同じ[次数＋１]個の制御点

- パラメータ $t$ の値は０から１の範囲に限らない

- ベジェ曲線を表現できる

# B スプライン曲線の形を決めるもの

- 制御点列 $P_i$ ＋ ノット列（ノットベクトル） $t_j$
- 複数の多項式曲線（セグメント）を接続して1本の曲線とする




http://profmsaeed.org/wp-content/uploads/2011/03/BSpline.html

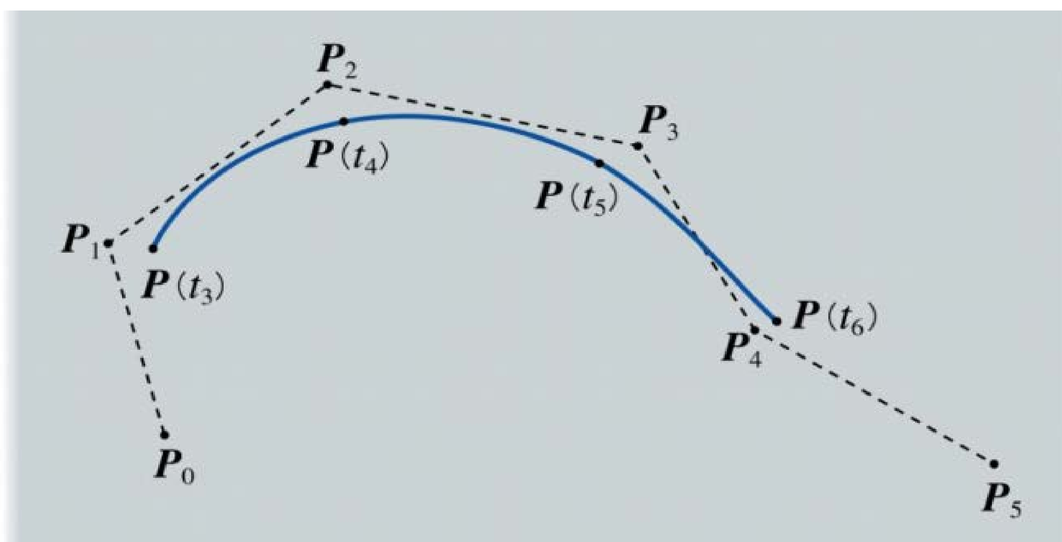
# B スプラインの形を決めるもの

- 「ノット列」は接続点でのパラメータ $t$ の値の列。ノット列の値は単調増加 $t_i \leqq t_{i+1}$

パラメータ $t$ の範囲は $t_n$ から $t_{n+L}$ まで。($n$ は次数、$L$ はセグメント数)

- （制御点の数）＝（次数）＋（セグメント数）
- （ノット数）＝2×（次数）+（セグメント数 + 1）

- 下の例は 次数 3、セグメント数 3、制御点数 6、ノット数 10
  $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9) = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7)$



# 練習問題

- 3 次の B スプライン曲線について
  1. セグメント数が 1 のとき、制御点の数とノット列の要素数はいくつか
  2. セグメント数が 3 のときは、それぞれいくつか
  3. 制御点の数が 7 のとき、ノット列とセグメント数はそれぞれいくつか
  4. 制御点の数が 10 のときは、それぞれいくつか

# B スプラインの数式表現

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n+L-1}\underline{N_i^n(t)}P_i$$

混合関数「Bスプライン基底関数」

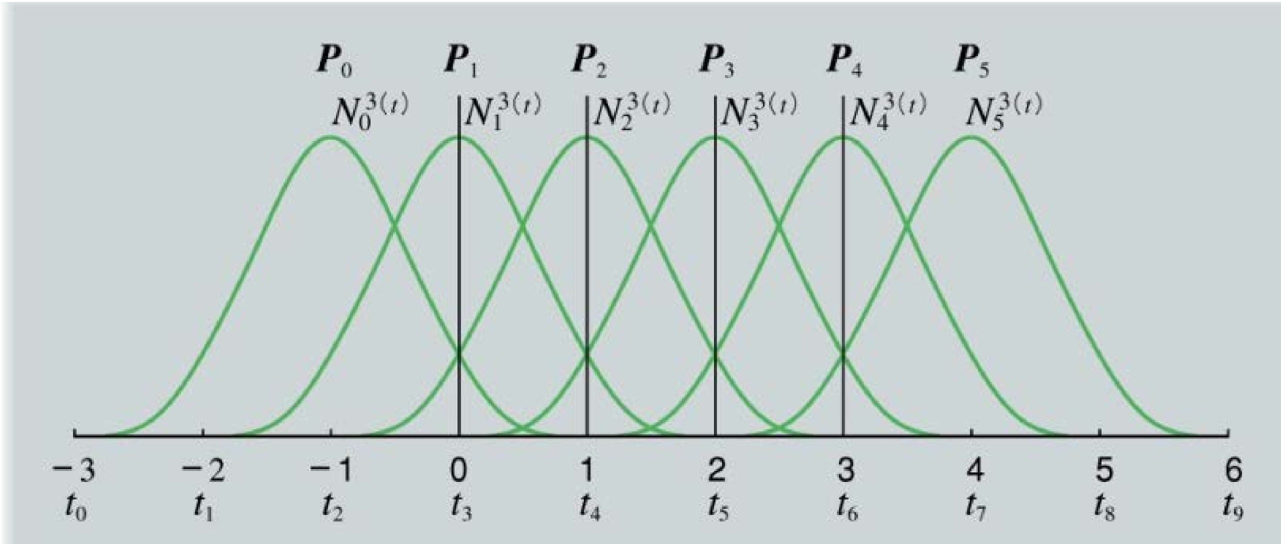
$n$: 次数
$L$: セグメントの数
制御点の数は $n+L$（3 次でセグメント数 1 なら制御点は 4 つ）

$$N_i^0(t)=\begin{cases}1 & (t_i\le t<t_{i+1})\\ 0 & \text{上記以外}\end{cases}$$

$$N_i^n(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+n}-t_i}N_i^{n-1}(t)+\frac{t_{i+n+1}-t}{t_{i+n+1}-t_{i+1}}N_{i+1}^{n-1}(t)$$

基底関数は**再帰的**に求まる
手計算は大変だけどプログラムなら再帰関数ですぐ求まる

# 基底関数のグラフ（一様 3 次）



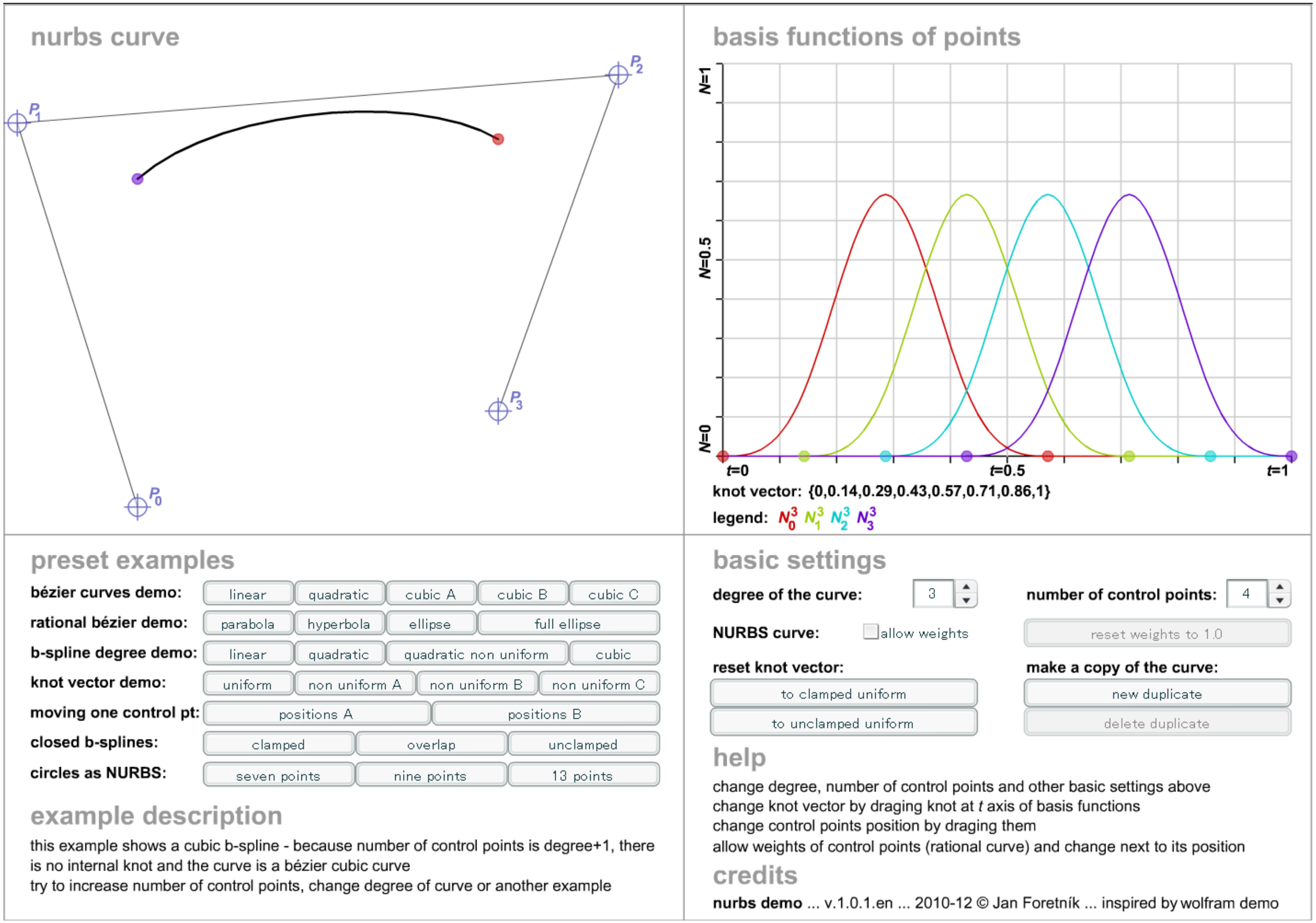

- ノットベクトル $t_i$ が一定の間隔で存在 → 一様

  （ノットの間隔を変更すると「非一様」になる）
- ある $t$ の値では 4 つのグラフが存在 → 4 つの制御点が影響
- P($t_4$) から P($t_5$) は、$P_0$, $P_5$ の影響を受けない → 局所性
- 最初と最後のノットを「次数+1」個だけ重ねると、端点が制御点と一致し、ベジェ曲線と同等になる

# B スプライン曲線まとめ

- 複数のセグメントを接続して１本にしたもの
- ノット列が重要な役割をする
- 曲線の制御が局所的
- 接続の問題がない（常に滑らか）
- ベジェ曲線を表現できる

- 放物線以外の２次曲線を厳密に表現できない（NUBRBS 曲線なら対応できる）

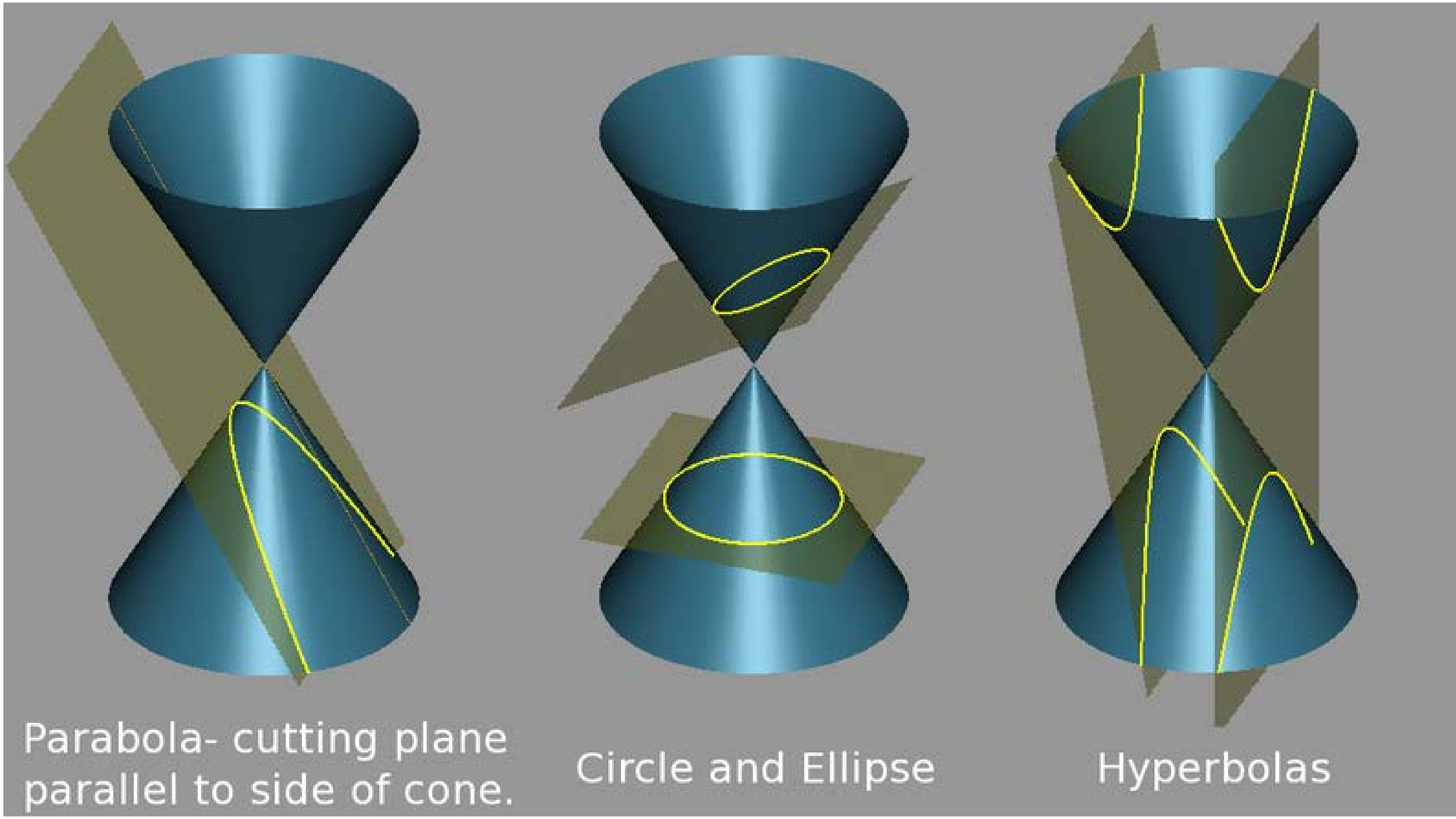



http://geometrie.foretnik.net/files/NURBS-en.swf

# 曲線の種類

- パラメトリックな自由曲線
  補間方式　　　　スプライン補間曲線
  制御点方式　　　ベジェ曲線、B スプライン曲線
- 2 次曲線 (円錐曲線)
  円、楕円、放物線、双曲線、（直線）
  円錐の切断によって得られる $x$, $y$ の 2 次式

# 2 次曲線 (円錐曲線)




（放物線）　（円と楕円）　（双曲線）

# 円錐曲線とパラメトリック曲線

- ベジェ曲線やＢスプラインで統一的に表現できるか？

- 放物線は可能 (パラメータ $t$ に関する2次式の曲線)

$$\begin{cases} x = t \\ y = a\,t^2 + b\,t + c \end{cases}$$

- 円や楕円、双曲線は**不可**

楕円（$a = b$なら円）

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

双曲線

$$\begin{cases} x = a \sec t = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases}$$

  - 円や楕円、双曲線は<u>無限回微分可能</u>だが、ベジェ曲線やＢスプラインは<u>有限回しか微分可能ではない</u>

# 有理ベジェ曲線

- ベジェ曲線の式を有理式に拡張したもの
  - 有理式なら無限回微分可能
- 制御点ごとに、重み $w_i$ をかけ合わせる

- 放物線以外の 2 次曲線（楕円や双曲線）も厳密に表現できる

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \, Pi \, B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i \, B_i^n(t)}$$

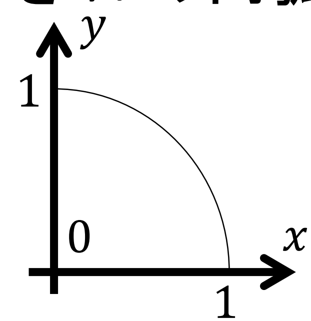
# 参考：円の有理表現

- 円の角度のパラメータ $\theta$ を使って $t = \tan\frac{\theta}{2}$ とおくと

$$\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 1 \quad \text{より、} \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{1+t^2}$$

- この関係式から円弧を次のようにパラメータ化できる
  - $t$ が 0 から 1 まで動くとき ¼ の円弧（単位円）になる

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2\,t}{1+t^2} \end{cases}$$




- 2 次有理ベジェ曲線で厳密に表現可能
  - 重みは例えば $w_0 = w_1 = 1$, $w_2 = 2$
  - 制御点は例えば $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (0, 1)$

# NURBS 曲線

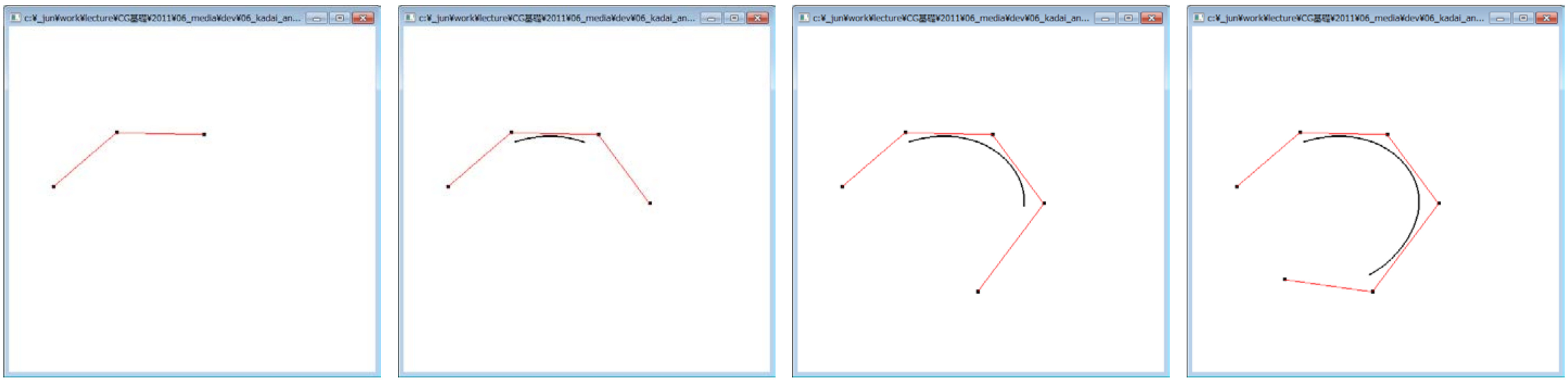
- NURBS： Non-Uniform Rational B-Spline
  (非一様有理 B スプライン)
- B-Spline 曲線の式を有理式に拡張したもの
- 制御点ごとに、重み $w_i$ をかけ合わせる
  （制御点、ノット列、重み の組み合わせで
  形が決まる）

- 放物線以外の 2 次曲線（楕円や双曲線）も厳密に表現できる

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n+L-1} w_i P_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n+L-1} w_i N_i^n(t)}$$

# 課題

# B スプライン曲線を描画する




デモ

# 課題を上手にこなすためのヒント

## ＴＡ を有効活用する

ＴＡのリソース

75分×3人 = 225分人

受講生の人数（3C113に約50人）

225÷50=4.5分

一人当たり5分弱は個別指導してもらう権利がある

隣の友達と2人で質問すれば10分！