

コンピュータグラフィックス 基礎

第6回 曲線・曲面の表現 「Bスプライン曲線」

金森 由博

学習の目標

- B スプライン曲線を学ぶ
- 曲線の基底関数の概念を理解する
- 制御点を入力することで、B スプライン曲線を描画するアプリケーションの開発を行えるようになる

基底関数の理解

曲線上の点の位置は、パラメータ t と制御点の位置によって定義される

曲線上の点の位置は、制御点の座標を混ぜ合わせて作る

$$P(t) = a(t)P_0 + \beta(t)P_1 + \gamma(t)P_2 \cdot \cdot \cdot$$

この混ぜ合わせ方の係数関数 α 、 β 、 γ $\cdot \cdot \cdot$ を定義したものが基底関数

ベジエ曲線の復習

n 次ベジエ曲線（ベジエ曲線の一般化）

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \boxed{{}_n C_i t^i (1-t)^{n-i}} P_i$$

↑
制御点に対する係数
（重み付け、混合比）

パラメータ t によって変化する

$${}_n C_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

↑
2項係数

「基底関数」

ベジエ曲線の復習

• バーンスタイン基底関数

$$B_i^n = \binom{n}{i} C_i t^i (1-t)^{n-i}$$

n は次数を i は制御点の番号を表す

■ 図3.24——3次バーンスタイン基底関数のグラフ

3次の場合

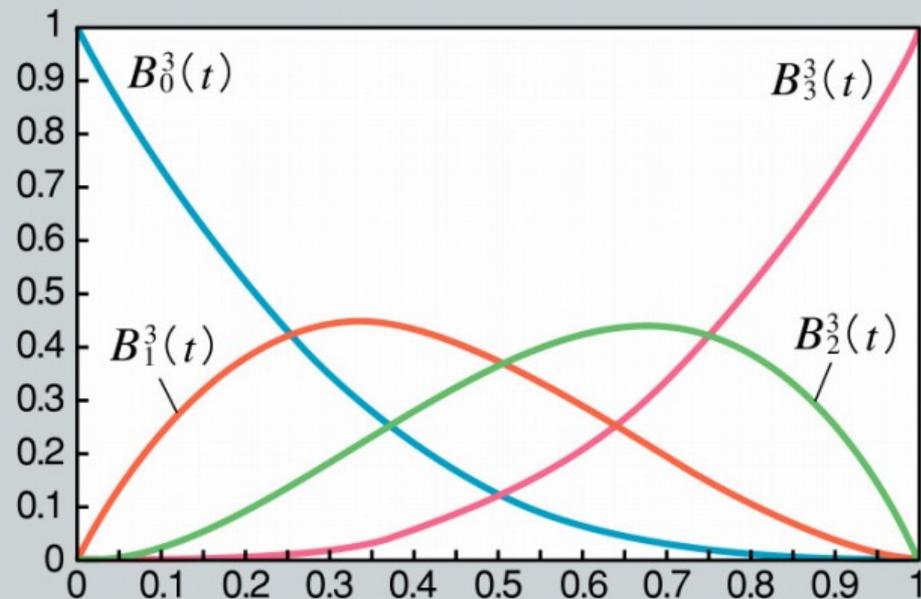
$$B_0^3 = (1-t)^3$$

$$B_1^3 = 3t(1-t)^2$$

$$B_2^3 = 3t^2(1-t)$$

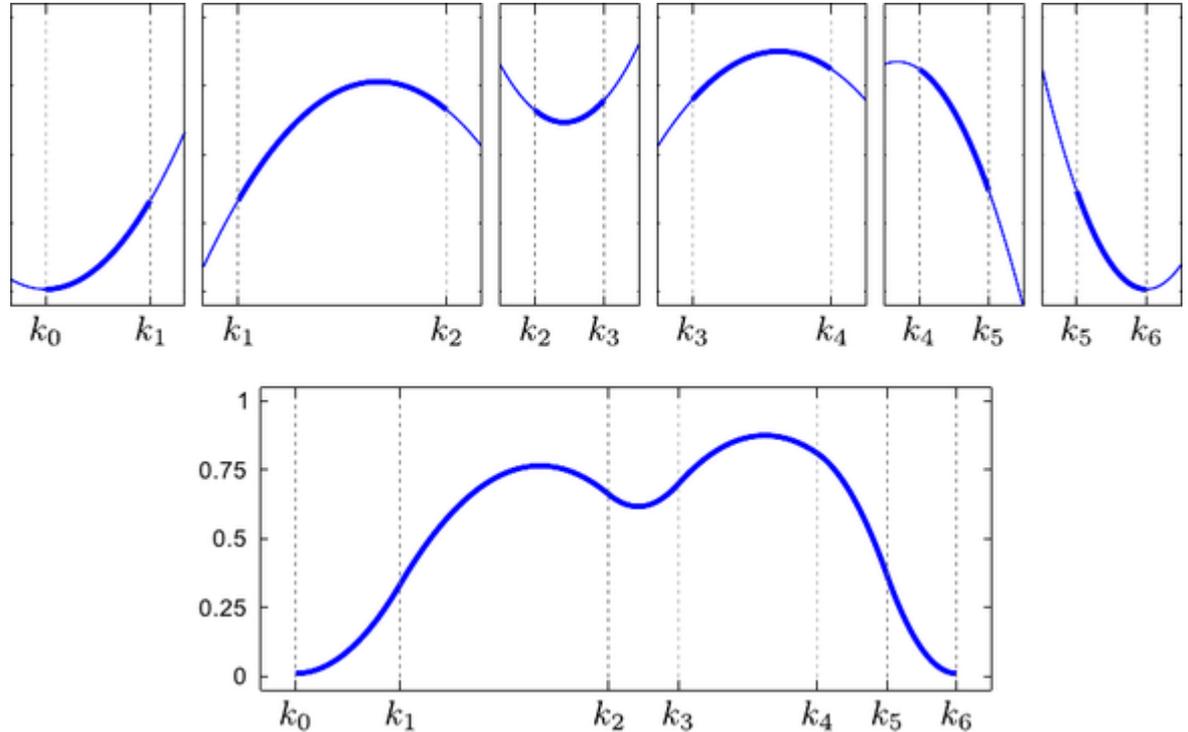
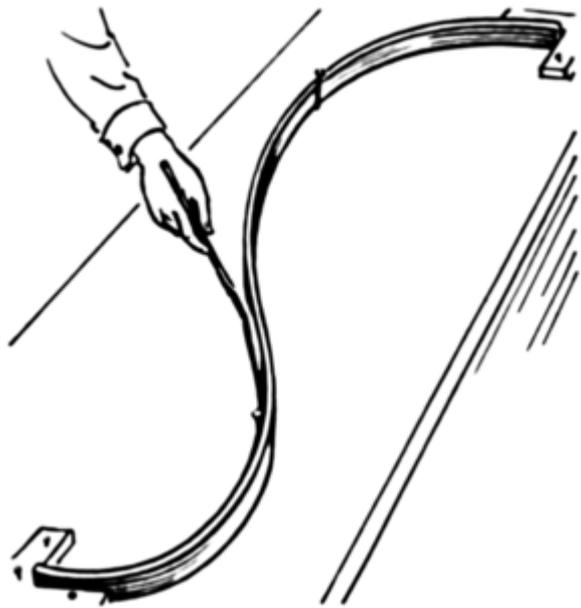
$$B_3^3 = t^3$$

3次のベジエ曲線において
制御点 P_0 の重み付けが
どのように変化するか



B スプライン曲線

スプライン曲線のイメージ



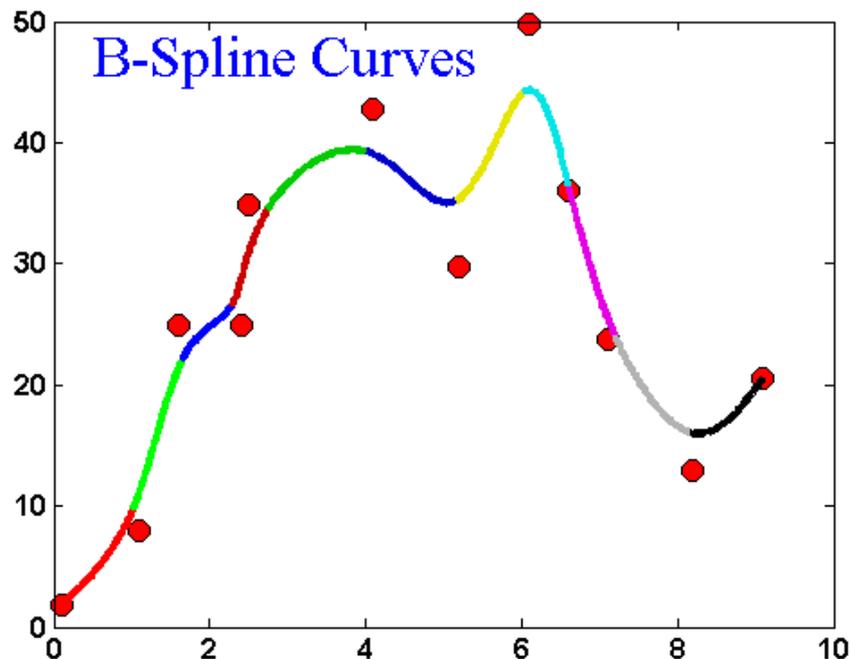
複数の曲線セグメントを繋ぎ合わせて作る
物理的には最も曲げエネルギーの小さい曲線

B スプライン曲線の特徴

- セグメントが常に微分も含めて連続的に接続する
(ベジエ曲線ではセグメント間の微分の連続性は保証されていない)
- 制御点をいくつでも指定できる
※ 曲線上の1点に着目した場合、その点の位置に影響を与えるのはベジエ曲線と同じ[次数 + 1]個の制御点
- パラメータ t の値は 0 から 1 の範囲に限らない
- ベジエ曲線を表現できる

B スプライン曲線の形を決めるもの

- 制御点列 (P_i) + ノット列 (ノットベクトル) (t_j)
- 複数の多項式曲線 (セグメント) を接続して 1 本の曲線とする

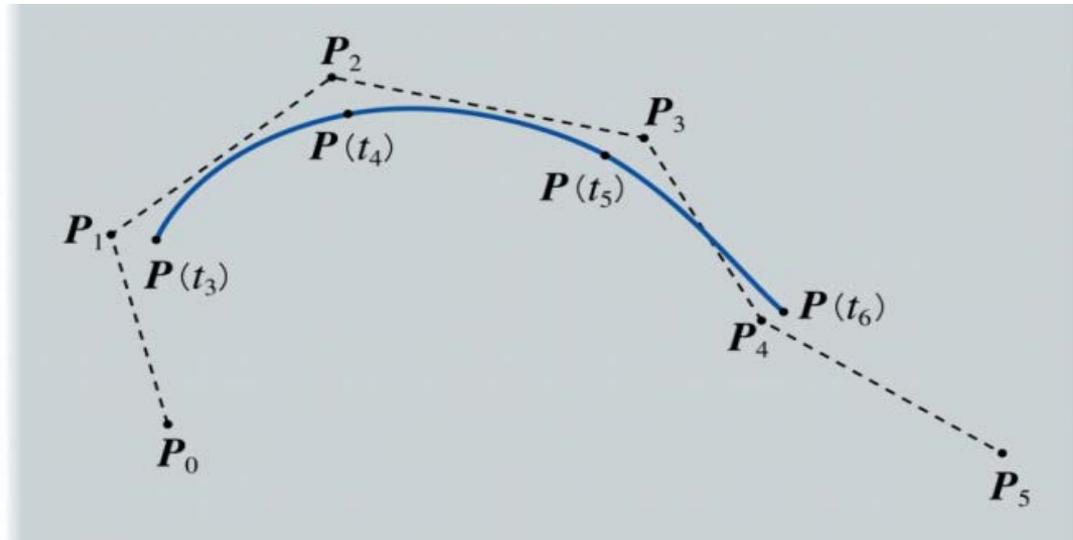


B スプラインの形を決めるもの

- 「ノット列」は接続点でのパラメータ t の値の列。ノット列の値は単調増加 $t_i \leq t_{i+1}$

パラメータ t の範囲は t_n から t_{n+L} まで。(n は次数、 L はセグメント数)

- (制御点の数) = (次数) + (セグメント数)
- (ノット数) = $2 \times$ (次数) + (セグメント数 + 1)
- 下の例は次数 3、セグメント数 3、制御点数 6、ノット数 10
($t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9$) = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7)



練習問題

- 3 次の B スプライン曲線について
 1. セグメント数が 1 のとき、制御点の数とノット列の要素数はいくつか
 2. セグメント数が 3 のときは、それぞれいくつか
 3. 制御点の数が 7 のとき、ノット列とセグメント数はそれぞれいくつか
 4. 制御点の数が 10 のときは、それぞれいくつか

B スプラインの数式表現

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n+L-1} N_i^n(t) P_i$$

n : 次数

L : セグメントの数

制御点の数は $n+L$ (3 次でセグメント数 1 なら
制御点は 4 つ)

混合関数 「Bスプライン基底関数」

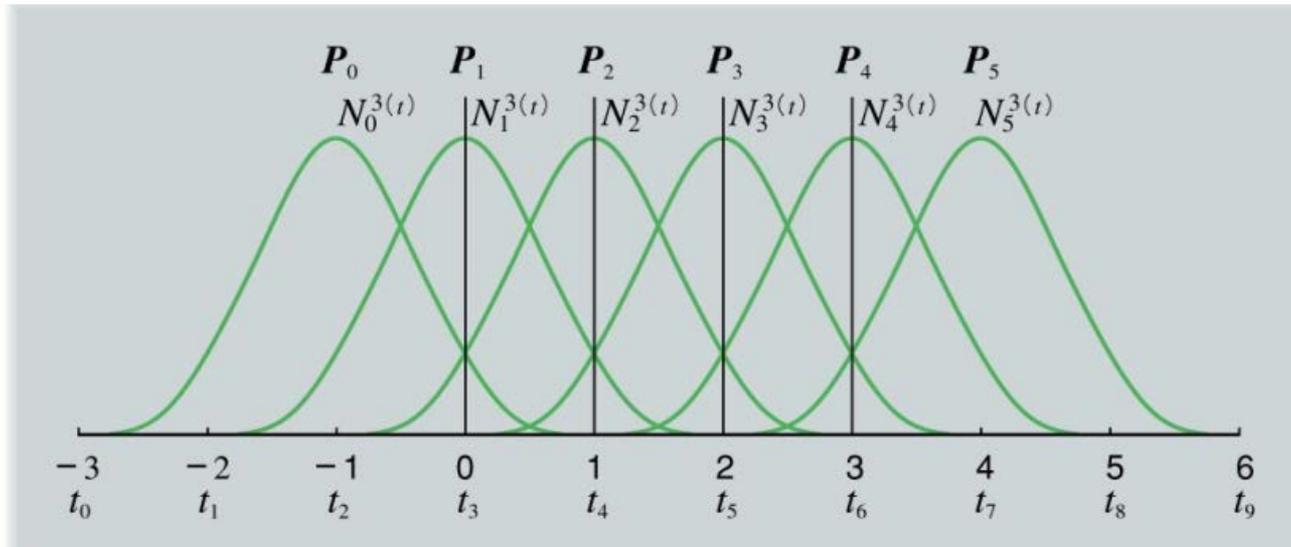
$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & (t_i \leq t < t_{i+1}) \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}$$

$$N_i^n(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+n} - t_i} N_i^{n-1}(t) + \frac{t_{i+n+1} - t}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t)$$

基底関数は**再帰的**に求まる

手計算は大変だけどプログラムなら再帰関数ですぐ求まる

基底関数のグラフ（一様3次）

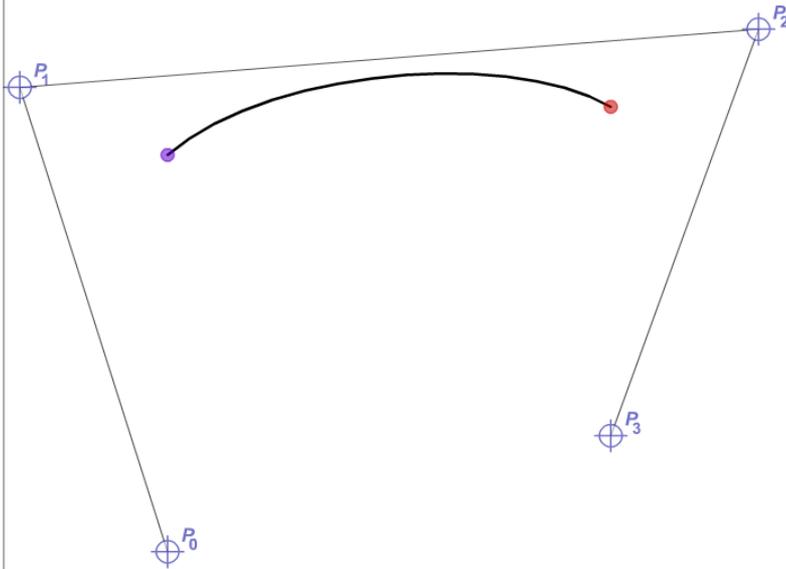


- ノットベクトル t_i が一定の間隔で存在 → 一様
(ノットの間隔を変更すると「非一様」になる)
- ある t の値では 4 つのグラフが存在 → 4 つの制御点が影響
- $P(t_4)$ から $P(t_5)$ は、 P_0, P_5 の影響を受けない → 局所性
- 最初と最後のノットを「次数+1」個だけ重ねると、端点が制御点と一致し、ベジエ曲線と同等になる

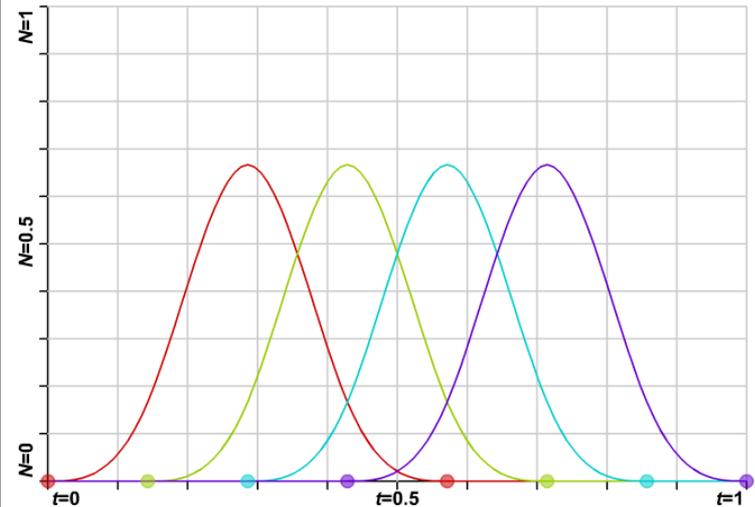
B スプライン曲線まとめ

- 複数のセグメントを接続して1本にしたもの
 - ノット列が重要な役割をする
 - 曲線の制御が局所的
 - 接続の問題がない（常に滑らか）
 - ベジエ曲線を表現できる
-
- 放物線以外の2次曲線を厳密に表現できない
（NUBRBS 曲線なら対応できる）

nurbs curve



basis functions of points



knot vector: {0,0.14,0.29,0.43,0.57,0.71,0.86,1}

legend: N_0^3 N_1^3 N_2^3 N_3^3

preset examples

bézier curves demo: linear quadratic cubic A cubic B cubic C

rational bézier demo: parabola hyperbola ellipse full ellipse

b-spline degree demo: linear quadratic quadratic non uniform cubic

knot vector demo: uniform non uniform A non uniform B non uniform C

moving one control pt: positions A positions B

closed b-splines: clamped overlap unclamped

circles as NURBS: seven points nine points 13 points

example description

this example shows a cubic b-spline - because number of control points is degree+1, there is no internal knot and the curve is a bézier cubic curve
try to increase number of control points, change degree of curve or another example

basic settings

degree of the curve: 3

number of control points: 4

NURBS curve: allow weights

reset weights to 1.0

reset knot vector:

to clamped uniform

to unclamped uniform

make a copy of the curve:

new duplicate

delete duplicate

help

change degree, number of control points and other basic settings above
change knot vector by dragging knot at t axis of basis functions
change control points position by dragging them
allow weights of control points (rational curve) and change next to its position

credits

nurbs demo ... v.1.0.1.en ... 2010-12 © Jan Foretník ... inspired by wolfram demo

曲線の種類

- パラメトリックな自由曲線

補間方式 スプライン補間曲線

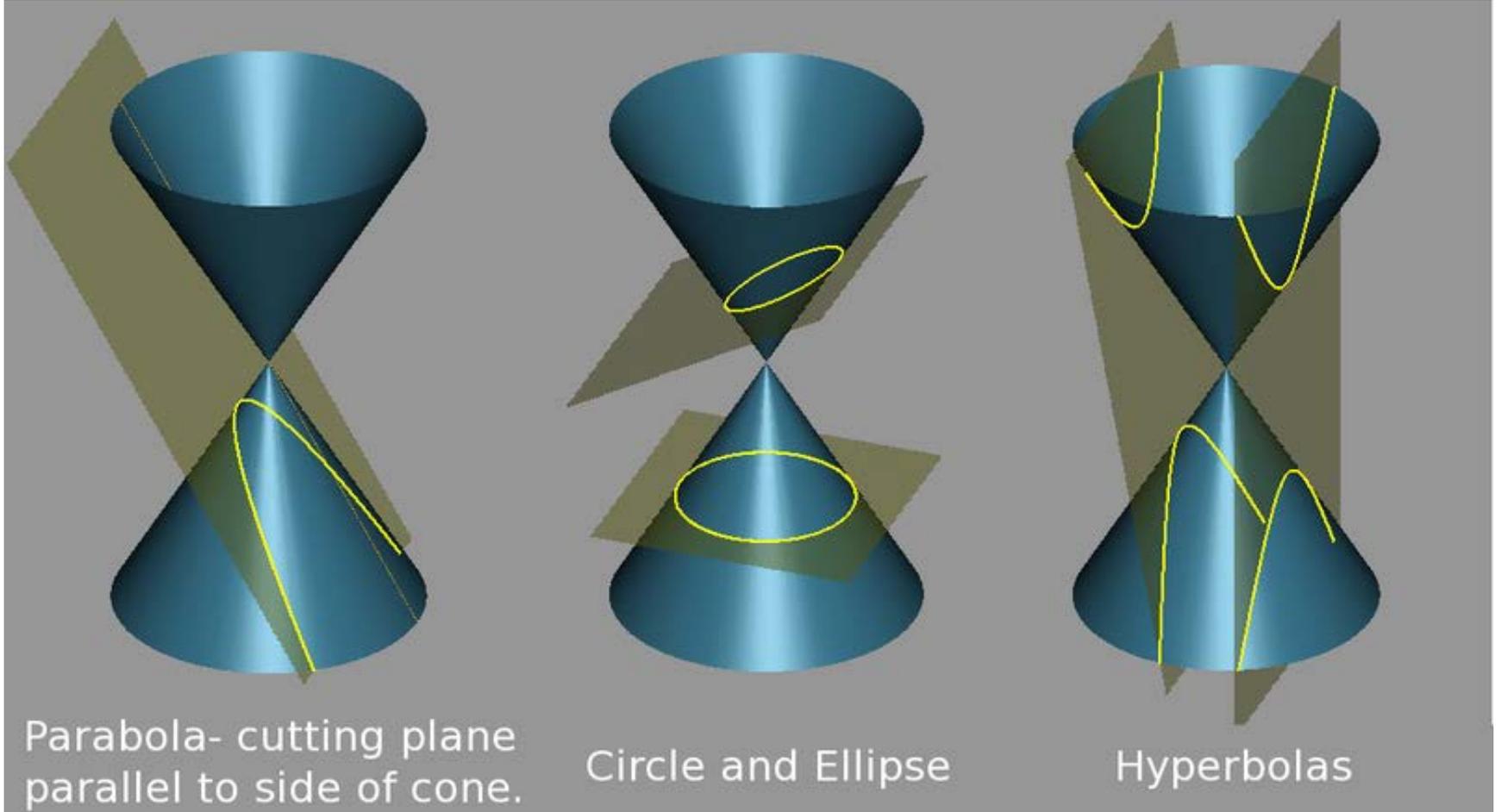
制御点方式 ベジエ曲線、B スプライン曲線

- 2 次曲線 (円錐曲線)

円、楕円、放物線、双曲線、 (直線)

円錐の切断によって得られる x, y の 2 次式

2次曲線 (円錐曲線)



(放物線)

(円と楕円)

(双曲線)

円錐曲線とパラメトリック曲線

- ベジエ曲線や B スプラインで統一的に表現できるか？

- 放物線は可能 (パラメータ t に関する 2 次式の曲線)

$$\begin{cases} x = t \\ y = a t^2 + b t + c \end{cases}$$

- 円や楕円、双曲線は**不可**

楕円 ($a = b$ なら円)

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

双曲線

$$\begin{cases} x = a \sec t = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases}$$

- 円や楕円、双曲線は無限回微分可能だが、ベジエ曲線や B スプラインは有限回しか微分可能ではない

有理ベジエ曲線

- ベジエ曲線の式を有理式に拡張したもの
 - 有理式なら無限回微分可能
- 制御点ごとに、重み w_i をかけ合わせる
- 放物線以外の2次曲線（楕円や双曲線）も厳密に表現できる

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i P_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}$$

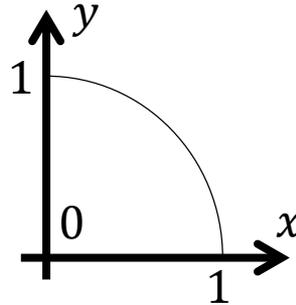
参考：円の有理表現

- 円の角度のパラメータ θ を使って $t = \tan \frac{\theta}{2}$ とおくと

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 \quad \text{より、} \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1+t^2}$$

- この関係式から円弧を次のようにパラメータ化できる
 - t が 0 から 1 まで動くとき $\frac{1}{4}$ の円弧（単位円）になる

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$



- 2次有理ベジエ曲線で厳密に表現可能
 - 重みは例えば $w_0 = w_1 = 1, w_2 = 2$
 - 制御点は例えば $P_0 = (1, 0), P_1 = (1, 1), P_2 = (0, 1)$

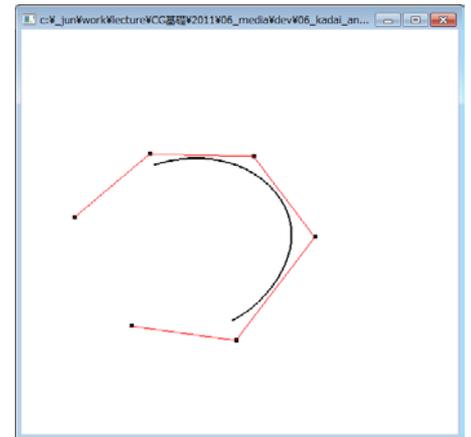
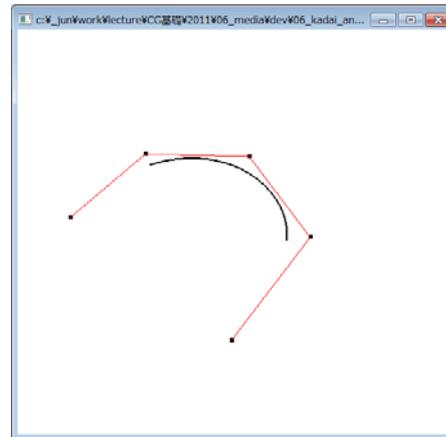
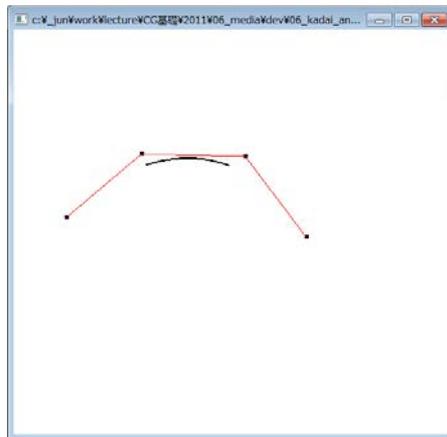
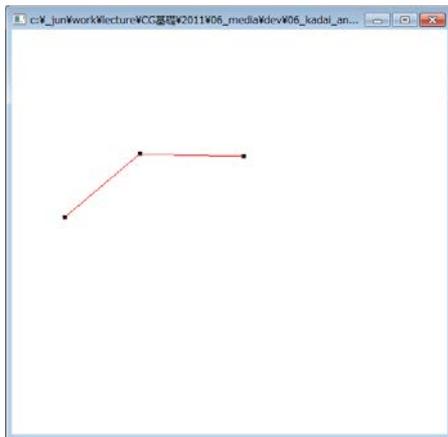
NURBS 曲線

- NURBS : Non-Uniform Rational B-Spline
(非一様有理 B スプライン)
- B-Spline 曲線の式を有理式に拡張したもの
- 制御点ごとに、重み w_i をかけ合わせる
(制御点、ノット列、重みの組み合わせで
形が決まる)
- 放物線以外の 2 次曲線 (楕円や双曲線) も厳密に
表現できる

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n+L-1} w_i P_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n+L-1} w_i N_i^n(t)}$$

課題

B スプライン曲線を描画する



デモ

課題を上手にこなすためのヒント

TA を有効活用する

TAのリソース

$75\text{分} \times 3\text{人} = 225\text{分人}$

受講生の人数（3C113に約50人）

$225 \div 50 = 4.5\text{分}$

一人当たり5分弱は個別指導してもらう権利がある

隣の友達と2人で質問すれば10分！